UEBER LINEARE

DIFFERENZENGLEICHUNGEN

VON

N. E. NØRLUND

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturv. og mathematisk Afd. VI. 8

KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1911

§ 1. In den nachfolgenden Zeilen werde ich eine kurze Übersicht über einige Untersuchungen betreffend die linearen Differenzengleichungen geben, die ich in meiner, in dänischer Sprache erschienenen, Habilitationsschrift[1] angestellt und nachher in einer Reihe kleinerer noch unpublizierter Abhandlungen weiter geführt habe.

Ich nehme an, dass die Koeffizienten $P_i(x)$ in der Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(x)\, u(x+i) = 0 \tag{1}$$

analytische Funktionen sind, und will dann die Integrale als Funktionen der komplexen Variablen x untersuchen.

Die Bestimmung des allgemeinen Integrals lässt sich auf die Bestimmung eines Fundamentalsystemes von Integralen $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_k(x)$ reduzieren, die analytische Funktionen von x sind der Art, dass die Determinante:

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots\ u_k(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \ldots\ u_k(x+1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_1(x+k-1) & u_2(x+k-1) & \ldots\ u_k(x+k-1) \end{vmatrix} \tag{2}$$

nicht identisch verschwindet. Das allgemeine Integral hat dann die Form:

$$u(x) = \pi_1(x)\, u_1(x) + \pi_2(x)\, u_2(x) + \ldots + \pi_k(x)\, u_k(x), \tag{3}$$

wo $\pi_i(x)$ willkürliche Funktionen sind, die den Periodicitätsbedingungen

$$\pi_i(x) = \pi_i(x+1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

befriedigen. Das Vorkommen dieser Funktionen giebt dem Integrationsproblem einen unbestimmten Charakter. Man könnte versuchen, es auf die Weise genauer zu präzisieren, dass man verlangte, dass $u_1(x)$, ..., $u_k(x)$ so einfache analytische Eigenschaften wie möglich haben. Wir werden zeigen, dass, wenn man den Koeffizienten $P_i(x)$ gewisse beschränkende Bedingungen auferlegt, sich zwei Fundamentalsysteme von Integralen bilden lassen, die sich vor allen anderen auszeichnen. In verschiedener Weise kommt man ganz natürlich dazu, eben diese beiden Fundamentalsysteme aufzustellen. Gegenseitig sind sie völlig gleichberechtigt, und die

[1] Bidrag til de lineære Differensligningers Theori. København 1910.

Untersuchung der analytischen Eigenschaften des einen Systems — besonders sein Verhalten in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ — wird in hohem Grade durch die Einführung des anderen Systems erleichtert, und umgekehrt. Wir wollen aber zuerst die Integrale im endlichen Teile der Ebene betrachten, und — ohne einschränkende Bedingungen für die Koeffizienten aufzustellen — eine Reihenentwicklung angeben, welche das Vorhandensein eines Fundamentalsystemes von Integralen zeigt, die analytische Funktionen von x sind, und die die Integrale in allen Punkten darstellt, in welchen sie holomorph sind.

Nehmen wir an, dass die Koeffizienten $P_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ die singulären Punkte $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ haben, die auch in unendlicher Anzahl vorhanden sein können, und bezeichnen wir mit (β) die Menge der Punkte:

$$\beta_i + s \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ s = \ldots, -2, -1, 0, k, k+1, k+2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Die Nullpunkte für $P_0(x)$ seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und die Nullpunkte für $P_k(x-k)$ seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$. Wir bezeichnen mit (α) die Menge der Punkte:

$$\alpha_i - s \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

und mit (γ) die Menge der Punkte:

$$\gamma_i + s \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir ein zusammenhängendes Gebiet, begrenzt von einem ganz im Endlichen liegenden geschlossenen Kontur C und einer Reihe von beliebig kleinen Kreisen um diejenigen Punkte in (α), (β) und (γ), die innerhalb C liegen. Wenn einige der Punkte in (β) kritische Punkte sind, verbinde ich diese mit dem Punkte ∞ durch Verzweigungsschnitte. Das so ausgeschnittene Gebiet bezeichne ich mit Γ; ich setze nun:

$$u(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} R_\nu(x) f(x+\nu) \tag{4}$$

und bestimme $R_\nu(x)$ durch die Rekursionsformel

$$P_0(x+\nu) R_\nu(x) + P_1(x+\nu-1) R_{\nu-1}(x) + \ldots + P_k(x+\nu-k) R_{\nu-k}(x) = 0 \tag{5}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$P_0(x) R_0(x) = 1; \quad R_{-1}(x) = R_{-2}(x) = \ldots = R_{1-k}(x) = 0.$$

$u(x)$ befriedigt dann formell die Differenzengleichung (1). Man kann zeigen, dass man in unendlich vielen Weisen die arbiträre Funktion $f(x)$ so festlegen kann, dass die Reihe (4) innerhalb Γ gleichmässig konvergent ist (z. B. indem man $f(x)$ einer passend gewählten ganzen Transcendenten gleich setzt); von diesen Festlegungen geben eine Anzahl von k ein System von linear unabhängigen Integralen, die innerhalb des Gebietes Γ eindeutige, reguläre, analytische Funktionen von x sind.

Es ist leicht zu sehen, wo diese Integrale singuläre Stellen haben. Teilen wir die Nullpunkte für $P_0(x)$ in Gruppen, so dass alle Punkte, deren Differenzen ganze Zahlen sind, zu derselben Gruppe gezählt werden. Wir nehmen an, dass

$$a_p,\ a_{p+1},\ a_{p+2},\ \ldots$$

eine solche Wurzelgruppe bilden, und dass die Multiplicität dieser Wurzeln beziehungsweise $n_0, n_1, n_2, \ldots$ sei; denkt man sich sie so geordnet, dass

$$\Re(a_p) > \Re(a_{p+1}) > \Re(a_{p+2}) > \ldots,$$

so zeigt die Rekursionsformel (5), dass für $\nu > 0$ a_p ein Pol ist für $R_\nu(x)$ und zwar höchstens von der n_0-ten Ordnung, und allgemein, wenn $\nu > a_p - a_{p+s}$, so ist a_{p+s} höchstens ein $(n_0 + n_1 + \ldots n_s)$-doppelter Pol für $R_\nu(x)$ und damit auch für die Integrale.

Man kann ebenso die Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ in Gruppen teilen. Es seien

$$\gamma_p, \gamma_{p+1}, \gamma_{p+2}, \ldots$$

eine solche, und es sei

$$\Re(\gamma_p) < \Re(\gamma_{p+1}) < \Re(\gamma_{p+2}) < \ldots,$$

so sieht man, wenn m_s die Multiplicität von γ_{p+s} bezeichnet, dass die Integrale in unsrem Fundamentalsystem für $x = \gamma_p,\ \gamma_p + 1,\ \gamma_p + 2, \ldots \gamma_{p+1} - 1$ höchstens m_0-doppelte Pole haben, und allgemein für

$$x = \gamma_{p+s},\ \gamma_{p+s} + 1, \ldots \gamma_{p+s+1} - 1$$

höchstens $(m_0 + m_1 + \ldots + m_s)$-doppelte Pole haben.

Jeder Gruppe, die eine endliche Anzahl Nullpunkte enthält, entspricht also eine unendliche Reihe Pole, die alle endlicher Ordnung sind. Wenn aber eine Gruppe unendlich viele Nullpunkte enthält, so wächst die Ordnung der entsprechenden Pole über jede Grenze hinaus, wenn die Pole sich dem Punkte ∞ nähern.

$(a)'$ und $(\gamma)'$ mögen die Ableitungen der Mengen (a) und (γ) bezeichnen. Die möglicherweise in diesen enthaltenen Punkte sind Häufungsstellen für Pole und folglich wesentlich singuläre Stellen für unsere Integrale. Die innerhalb Γ liegenden singulären Stellen für das durch eine Reihe von der Form (4) definierte Fundamentalsystem von Integralen sind also:

1) Die Punkte in den Mengen (β), $(a)'$ und $(\gamma)'$, die wesentlich singuläre Punkte oder Pole für die Integrale sind.
2) Die Punkte in den Mengen $(a) - (a)'$ und $(\gamma) - (\gamma)'$, die alle Pole sind. Zu den singulären Punkten ist noch der Punkt $x = \infty$ zu rechnen, der, wenn die Integrale sich nicht auf rationale Funktionen reduzieren, ein wesentlich singulärer Punkt für diese ist.

Sind z. B. die Koeffizienten in der Differenzengleichung ganze Transcendenten, so finden sich also keine andere wesentlich singuläre Stelle für die Integrale als der Punkt ∞ und die möglicherweise vorkommenden Häufungsstellen für die Pole

$$a_i - s \quad \text{und} \quad \gamma_i + s \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Sind die Koeffizienten in der Differenzengleichung speziell rationale Funktionen, so kann man ein Fundamentalsystem von Integralen finden, welche ganze Transcendenten des Genre 1 oder des Genre 0 sind. Man braucht nämlich nur die hier bestimmten meromorphen Integrale mit einer passend gewählten periodischen Funktion von x zu multiplizieren.

§ 2. Um die Natur der Singularität im Punkte ∞ untersuchen zu können, muss man speziellere Voraussetzungen über die Koeffizienten der Differenzengleichung machen. Schreiben wir diese in der Form

$$P(u(x)) \equiv \sum_{i=0}^{i=k} x(x-1)\ldots(x-i+1)p_i(x)\,\Delta_{-1}^{i}\,u(x) = 0\,, \tag{6}$$

wo

$$\Delta_{\omega}^{i}\,u(x) = \frac{u(x+i\omega)-\binom{i}{1}u(x+(i-1)\omega)+\ldots+(-1)^i u(x)}{\omega^i}\,,$$

und nehmen wir zunächst an, dass die Koeffizienten $p_i(x)$ Funktionen sind, die für $\Re(x)>\mu$ dargestellt werden können durch konvergente Fakultätenreihen von der Form

$$p_i(x) = a_{i,0}+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{a_{i\,s}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s)} \qquad (i=0,1,2,\ldots,k-1)\,, \tag{7}$$

während wir annehmen, dass $p_k(x)=1$ ist. Wir nennen (6) die 1ste Normalform der Differenzengleichung.

Man kann nun die Existenz eines Integrales der Form:

$$u(x) =$$
$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho+1)}\left\{g_0+\frac{g_1}{x-\rho+1}+\frac{g_2}{(x-\rho+1)(x-\rho+2)}+\frac{g_3}{(x-\rho+1)(x-\rho+2)(x-\rho+3)}+\ldots\right\} \tag{8}$$

zeigen. Setzt man nämlich statt $u(x)$ in (6) $\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho+1)}$ ein, so ergiebt sich

$$P\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho+1)}\right) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho+1)}\sum_{i=0}^{i=k}\rho(\rho-1)\ldots(\rho-i+1)p_i(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho+1)}f(x,\rho).$$

Setzt man in $f(x,\rho)$ die Reihen (7) ein, so findet man nach einer Transformation eine Fakultätenreiheentwicklung der Form

$$f(x,\rho) = f_0(\rho)+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{f_s(\rho)}{(x-\rho+1)(x-\rho+2)\ldots(x-\rho+s)}\,. \tag{9}$$

Um die Koeffizienten $g_1, g_2, g_3, \ldots$ zu bestimmen, setzen wir die Reihen (8) in (6) ein und finden:

$$P(u(x)) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu P\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho+\nu+1)}\right) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\sum_{s=0}^{s=\infty} g_\nu f_s(\rho-\nu)\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho+\nu+s+1)} =$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho+\nu+1)}\left\{g_\nu f_0(\rho-\nu)+g_{\nu-1}f_1(\rho-\nu+1)+\ldots+g_0 f_\nu(\rho)\right\} = 0.$$

$u(x)$ befriedigt also die Differenzengleichung formell, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{array}{l} g_0 f_0(\rho) = 0 \\ g_1 f_0(\rho-1)+g_0 f_1(\rho) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_\nu f_0(\rho-\nu)+g_{\nu-1}f_1(\rho-\nu+1)+\ldots+g_0 f_\nu(\rho) = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (10)$$

Wir nehmen an, dass $g_0 \neq 0$ ist; ρ muss dann als Wurzel der „determinierenden Gleichung"

$$f_0(\rho) = \sum_{i=0}^{i=k} a_{i,0}\rho(\rho-1)\ldots(\rho-i+1) = 0 \qquad (11)$$

bestimmt werden.

Sie ist von k-ten Grade und giebt uns k Werte von ρ, die wir in der Weise in Gruppen teilen, dass alle diejenigen, deren Differenzen ganze Zahlen sind, zu derselben Gruppe gezählt werden. Wenn ρ eine solche Wurzel ist, dass keine der anderen Wurzeln von der Form $\rho-n$ ist, — wo n eine ganze positive Zahl ist —, so bestimmen die Rekursionsformeln (10) eindeutig die Koeffizienten $g_1, g_2, g_3, \ldots$ als Multiplen des wilkürlich zu wählenden g_0. Um die Konvergenz der Reihe (8) nachzuweisen, kann man eine Majorantenreihe der gleichen Form bestimmen, wo aber die Koeffizienten g_ν durch Zahlen ersetzt sind, die positiv sind und so beschaffen, dass die Summe von den n ersten grösser ist als der Modulus der Summe der n ersten Koeffizienten g_ν für alle Werte von n. Diese Reihe befriedigt eine Majorant-Differenzengleichung der Form:

$$\sum_{i=0}^{i=k} a_i(x+1)x\ldots(x+i-2)\,\Delta_{-1}^{i}v(x) =$$

$$=\frac{M}{x-\lambda}\sum_{i=0}^{i=k-1}(x+1)x\ldots(x+i-2)\,\Delta_{-1}^{i}v(x)+\gamma+\frac{K}{x-\lambda},$$

wo die Zahlen α, M, γ, K und λ von x unabhängige Konstanten sind; diese Differenzengleichung hat eine so einfache Form, dass man leicht zeigen kann, dass die Majorantenreihe konvergent ist für $\Re(x) > \lambda - k$; man kann zugleich zeigen, dass die Reihe (8) gleichmässig konvergent ist in ρ. Es ist dann erlaubt diese Reihe gliedweise eine willkürliche Anzahl Male mit Rücksicht auf ρ zu differenzieren. Man zeigt hierdurch die Existenz eines Fundamentalsystems von Integralen der Differenzengleichung (6), die alle die Form haben:

$$u_s(x) \equiv \Phi_s(x) =$$
$$= \varphi_0(x)\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho_s+1)} + \varphi_1(x)\frac{\partial}{\partial\rho_s}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho_s+1)} + \cdots + \varphi_n(x)\frac{\partial^n}{\partial\rho_s^n}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho_s+1)}, \tag{12}$$

wo $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ Fakultätenreiheentwicklungen sind, die konvergent sind für $\Re(x) >$ als eine gewisse Zahl $c \geqq \mu$. Zu jeder Wurzel in dieser determinierenden Gleichung gehört eine Anzahl Integrale, die mit der Multiplizität der Wurzel gleich sind. Wir nennen diese Integrale, die bis auf einen arbiträren konstanten Faktor bestimmt sind, das 1ste kanonische Fundamentalsystem. Die Entwicklungen (12) zeigen, dass die Integrale analytische Funktionen von x sind, die für $\Re(x) > c$ regulär sind. Wenn x in einer solchen Weise gegen Unendlich wächst, dass es beständig innerhalb des Konvergenzgebietes bleibt, so konvergieren die Fakultätenreihen gegen ihre konstanten Glieder, und $u_s(x)$ verhält sich asymptotisch wie:

$$u_s(x) \sim x^{\rho_s}\{k_0 + k_1 \log x + k_2 \log^2 x + \ldots + k_n \log^n x\}, \quad \Re(x) > c, \tag{13}$$

wo $k_0, k_1, \ldots, k_n$ Konstanten bezeichnen, die nicht alle Null sind.

Die Entwicklungen (12) definieren nur die kanonischen Integrale für $\Re(x) > c$; es ist aber leicht, diese analytisch fortzusetzen. Schreibt man nämlich die Differenzengleichung (6) in der Form

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+k)u(x) = Q_1(x)u(x+1) + \ldots + Q_k(x)u(x+k), \tag{14}$$

so ist für $\Re(x) > c-1$ die rechte Seite durch die Entwicklungen (12) definiert. Schreibt man dann $x-1$ statt x in (14), so erhält man $u(x)$ für $\Re(x) > c-2$ definiert, u. s. w. Auf diese Weise kann man $u(x)$ nach und nach analytisch fortsetzen, indem man dessen Gebiet jedes Mal mit einem Streifen der Breite 1 vermehrt, bis man eine wesentliche singuläre Linie für einen der Koeffizienten erreicht. Nimmt man dagegen an, dass keiner der Koeffizienten $p_i(x)$ solche singulären Linien besitzt, und bezeichnet man ihre singulären Stellen, die in unendlicher Anzahl vorkommen können, mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, so sieht man, dass die Integrale in unsrem Fundamentalsystem analytische Funktionen sind, die in jedem endlichen Gebiete regulär sind, ausser in den Punkten $-1, -2, -3, \ldots$, die Pole sind, und in den Punkten

$$\beta_s - i \quad \begin{pmatrix} s = 1, 2, 3, \ldots \\ i = k, k+1, k+2, \ldots \end{pmatrix},$$

die Pole oder wesentlich singuläre Punkte sind. Die Differenzengleichung (14) zeigt leicht die Natur der Singularität in diesen Punkten. Man könnte sagen, dass die kanonischen Integrale innerhalb eines jeden endlichen Gebiets zu demselben Rationalitätsgebiet wie die Koeffizienten gehören. Dagegen ist die Singularität der Integrale im Unendlichen von einer wesentlich anderen Natur als die der Koeffizienten. Um sie genauer untersuchen zu können, wollen wir nun für die Koeffizienten $p_i(x)$ in (6) die speziellere Voraussetzung[1] machen, dass sie regulär sind in der Umgebung des Punktes ∞, d. h. dass sie durch Potenzreihen von $\left(\frac{1}{x}\right)$

[1] Im allgemeinen ist Unendlich nämlich eine wesentlich singuläre Stelle für $p_i(x)$.

dargestellt werden können, die für genügend grosse Werte von $|x|$ konvergent sind. Die Differenzengleichung kann nämlich in dem Falle zugleich auf die Form gebracht werden:

$$\sum_{i=0}^{i=k} (x+i)(x+i-1)\ldots(x+1)\, q_i(x)\, \Delta^i_{+1}\, u(x) = 0, \tag{15}$$

die wir als 2. Normalform bezeichnen wollen. Die Koeffizienten $q_i(x)$ sind hier Fakultätenreihen von der Form:

$$q_i(x) = b_{i,0} + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_{i,s+1}}{x(x-1)\ldots(x-s)}, \tag{16}$$

die alle für $\Re(x)$ kleiner als eine gewisse Zahl μ' konvergent sind. Es mögen die ρ_s dieselben Grössen wie oben bezeichnen; man kann dann die Existenz eines Fundamentalsystems von Integralen $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_k(x)$ zeigen, das von der Form ist:

$$U_s(x) \equiv \Psi_s(x) = \psi_0(x)\frac{\Gamma(-x)}{\Gamma(\rho_s - x)} + \psi_1(x)\frac{\partial}{\partial\rho_s}\,\frac{\Gamma(-x)}{\Gamma(\rho_s - x)} + \ldots + \psi^n(x)\frac{\partial^n}{\partial\rho_s^n}\,\frac{\Gamma(-x)}{\Gamma(\rho_s - x)}, \tag{17}$$

wo $\psi_i(x)$ Fakultätenreihen sind, die für $\Re(x)$ kleiner als eine gewisse Zahl $c' \leq \mu'$ konvergent sind. Wir nennen diese Integrale das 2. kanonische Fundamentalsystem. Die Entwickelungen (17) in Verbindung mit der Differenzengleichung (14) zeigen, dass diese Integrale analytische Funktionen von x sind, die regulär sind ausser in den Punkten:

$$\beta_s + i \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, 3, \ldots \\ i = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

welche Pole oder wesentlich singuläre Punkte sind, und in einer gewissen Anzahl Punkten

$$\gamma_s + i \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, 3, \ldots \\ i = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

die Pole der Integrale sind; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ sind hier die Nullpunkte für

$$\sum_{i=0}^{i=k} x(x-1)\ldots(x-i+1)\, p_i(x).$$

Zwischen den beiden kanonischen Fundamentalsystemen existieren lineare Gleichungen, deren Koeffizienten periodische Funktionen von x sind. Wählt man die in den Integralen vorkommenden arbiträren Konstanten in passender Weise, so kann man zeigen, dass die periodischen Funktionen so beschaffen sind, dass $u_s(x)$ durch die konvergente Reihenentwickelung $U_s(x)$ asymptotisch[1] dargestellt wird für $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > \frac{\pi}{2}$ und für $-\frac{\pi}{2} > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$, wo ε eine beliebig

[1] Wir zeichnen einen Kreis C mit Null als Zentrum und einem so grossen Radius, dass alle singuläre Punkte für die Koeffizienten in der Differenzengleichung innerhalb dieses Kreises liegen; indem wir von einem willkürlichen Punkte innerhalb der Konvergenzhalbebene ausgehen, lassen wir x gegen ∞ in einer solchen Weise wachsen, dass es beständig ausserhalb des Kreises C bleibt und ausserhalb eines Winkelraumes — mit der Öffnung 2ε — welcher die Achse der negativen Zahlen umschliesst.

kleine positive Zahl ist. Speziell wird $u_s(x)$ durch den Ausdruck (13) für $\pi-\varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi+\varepsilon$ asymptotisch dargestellt.

§ 3. Die im § 2 gegebenen Sätze lassen sich umkehren. Jede lineare homogene Differenzengleichung der k-ten Ordnung, die ein Fundamentalsystem von Integralen der Form (12) hat, lässt sich auf die Form (6) bringen, wo die Koeffizienten $p_i(x)$ durch konvergente Fakultätenreihenentwickelungen der Form (7) dargestellt werden können. Um dies zu zeigen, setzen wir die Reihen (12) in die Differenzengleichung, in der Determinantform geschrieben, ein:

$$\begin{vmatrix} u(x), & x\Delta_{-1}u(x), \ldots, x(x-1)\ldots(x-k+1)\Delta_{-1}^{k}u(x) \\ u_1(x), & x\Delta_{-1}u_1(x), \ldots, x(x-1)\ldots(x-k+1)\Delta_{-1}^{k}u_1(x) \\ \ldots & \ldots \\ u_k(x), & x\Delta_{-1}u_k(x), \ldots, x(x-1)\ldots(x-k+1)\Delta_{-1}^{k}u_k(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante kann in der Weise reduziert werden, dass alle Elemente in den k letzten Zeilen Fakultätenreihenentwickelungen der Form (7) werden. Man kann dann zeigen, dass das Produkt zweier Fakultätenreihen, die für $\Re(x) > \mu$ konvergent sind, in eine Fakultätenreihe entwickelt werden kann, welche für $\Re(x) > \mu$, $\Re(x) > 0$ konvergent ist. Alle Unterdeterminanten der Elemente der ersten Zeile können also durch konvergente Fakultätenreihen dargestellt werden, und es ist nicht schwierig zu zeigen, dass das konstante Glied in dem Koeffizienten von $x(x-1)\ldots(x-k+1)\Delta_{-1}^{k}u(x)$ von Null verschieden ist; damit ist aber auch die Behauptung bewiesen.

Die Differenzengleichung (6) ist also der allgemeinste Typus der linearen, homogenen Differenzengleichungen, die ein Fundamentalsystem von Integralen von der Form (12) haben. Diese Differenzengleichungen sind zugleich aus dem Grunde bemerkenswert, weil sie als Grenzfall[1] die allgemeinste Klasse der linearen Differentialgleichungen enthalten, für welche der Punkt $x=\infty$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit ist.

§ 4. Wenn in der Differenzengleichung (6)

$$p_k(x) = \frac{1}{x(x-1)\ldots(x-g+1)},$$

so ist die Anzahl der Wurzeln in der determinierenden Gleichung $< k$. Durch dasselbe Verfahren wie in § 2 kann man doch durch Hilfe der Rekursionsformeln (10), und jeder Wurzel in der determinierenden Gleichung entsprechend, rein formell eine Entwickelung der Form (8) bilden. Diese giebt aber im allgemeinen kein Integral, indem die Fakultätenreihe divergent ist. Um die Bedeutung dieser divergenten Reihen zu untersuchen, wollen wir eine allgemeinere Klasse von Differenzen-

[1] Wir nehmen also an, dass man dem konstanten Intervall der Differenzengleichung einen willkürlichen Wert giebt, statt es wie hier gleich 1 zu setzen, und dass man es dann gegen Null konvergieren lässt. Die Differenzengleichung geht dann in eine Differentialgleichung über, und unsere Integrale werden auf die von FUCHS untersuchten kanonische Integrale reduziert.

gleichungen betrachten:

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(x)\, u(x-i) = 0, \tag{19}$$

wo die Koeffizienten Fakultätenreihen der Form

$$P_i(x) = c_0^{(i)} + \frac{c_1^{(i)}}{x+1} + \frac{c_2^{(i)}}{(x+1)(x+2)} + \frac{c_3^{(i)}}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots \tag{20}$$

sind, die alle in einer gewissen Halbebene konvergent sind. Bilden wir „die charakteristische Gleichung":

$$c_0^{(0)} z^k + c_0^{(1)} z^{k-1} + \dots + c_0^{(k)} = 0,$$

und a_j sei eine einfache Wurzel in dieser Gleichung. Wir setzen dann:

$$u(x) = a_j^x \cdot w(x)$$

und bilden eine Differenzengleichung in $w(x)$, die wir in der Form (6) schreiben. Die determinierende Gleichung für diese ist 1sten Grades. Man findet folglich eine Entwickelung der Form:

$$a_j^x \cdot \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\rho_j+1)} \varphi(x), \tag{21}$$

wo $\varphi(x)$ eine im allgemeinen divergente Fakultätenreihe ist. Bei sukzessiven Näherungen und unter Benutzung von Entwickelungen gleicher Art wie die in § 1 erwähnten, kann man nun eine Reihe bilden, die für genügend grosse positive Werte von $\Re(x)$ konvergent ist, und die die Differenzengleichung befriedigt; diese Reihe, die selbst sehr komplizierter Form ist, wird für

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

durch die Reihe (21) asymptotisch dargestellt.

Wenn a_j eine n-dobbelte Wurzel in der charakteristischen Gleichung ist, so können zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten:

1) a_j ist zugleich eine $(n-p)$-doppelte Wurzel in der Gleichung

$$\sum_{s=0}^{s=k} c_p^{(s)} z^{k-s} = 0$$

für $p = 1, 2, \dots, n-1$.

2) Diese Bedingungen sind nicht erfüllt.

Im letzteren Falle ist die determinierende Gleichung der Differenzengleichung in $w(x)$ gleich einer Konstanten, es existiert keine asymptotische Entwickelung der Form (21).

Im ersteren Falle dagegen ist die determinierende Gleichung vom n-ten Grade $(n < k)$, und man findet folglich n Entwickelungen der Form:

$$u_s(x) \backsim a_j^x \Phi_s(x), \quad (s = 1, 2, \dots, n), \tag{22}$$

die n linear unabhängige Integrale asymptotisch darstellen.

$\Phi_s(x)$ ist hier eine Entwickelung der Form (12), nur sind die darin vorkommenden Fakultätenreihen divergent.

Wenn einige der Wurzeln in der charakteristischen Gleichung Null oder unendlich gross sind, so muss man, um ein Fundamentalsystem von Integralen zu erhalten, noch eine Reihe Substitutionen von der Form

$$u(x) = \Gamma^{\mu_r}(x)\, u^{(\mu_r)}(x)$$

ausführen und die Zahlen μ_r so bestimmen, dass die Differenzengleichung in $u^{(\mu_r)}(x)$ eine charakteristische Gleichung mit mindestens einer Wurzel hat, die endlich und von Null verschieden ist.

Man kann, wie ich in einer früheren Arbeit[1] näher nachgewiesen habe, in eindeutiger Weise eine Reihe Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ bestimmen, die so beschaffen sind, dass die gesamte Anzahl Wurzeln in den entsprechenden charakteristischen Gleichungen, die endlich und von Null verschieden sind, gerade der Ordnung der Differenzengleichung gleich sind. Wenn jedes Mal beim Vorkommen einer multiplen Wurzel in einer der charakteristischen Gleichungen die entsprechenden unter 1) genannten Bedingungen erfüllt sind, so existiert ein Fundamentalsystem von Integralen, die innerhalb des Winkelraumes $\frac{\pi}{2} - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ durch Entwickelungen asymptotisch dargestellt werden können, die alle von der Form:

$$\Gamma^{\mu_r}(x)\, a_j^x\, \Phi_s(x) \tag{23}$$

sind; Ausnahmefälle treten hier auf, wenn einige der Zahlen μ_r nicht ganze Zahlen sind, indem die Koeffizienten in den entsprechenden Differenzengleichungen in $u^{(\mu_r)}(x)$ dann nicht mehr so beschaffen sind, dass sie in Fakultätenreihen der Form (20) entwickelt werden können. Es sei z. B. $\mu_r = q : p$, wo p und q ganze Zahlen sind. Wir setzen dann

$$x = pz \quad \text{und} \quad u(x) = v(z)$$

und leiten aus der gegebenen Differenzengleichung eine Differenzengleichung in $v(z)$ ab. Man zeigt hierdurch die Existenz einer Anzahl Integrale, die durch Entwickelungen von der Form:

$$\Gamma^{\mu_r}\left(\frac{x}{p}\right) a_j^{\frac{x}{p}}\, \Phi_s\left(\frac{x}{p}\right) \tag{24}$$

asymptotisch dargestellt werden können. Die Reihen (23) enthalten als Grenzfall die asymptotischen Entwickelungen für die normalen Integrale einer linearen Differentialgleichung, während die Reihen (24) den subnormalen Integralen der Differentialgleichungen entsprechen.

§ 5. Die Beweise für die in den §§ 2—4 dargelegten Resultate verlangen, wie es aus den gegebenen Andeutungen hervorgeht, eine Reihe etwas umständlicher Erläuterungen. Aber es giebt einen Fall, wo man in viel leichterer Weise zu demselben Resultat gelangen kann, nämlich wenn die Koeffizienten der Differenzen-

[1] Acta mathematica Bd. 34 S. 16, 1911.

gleichung rationale Funktionen sind. Man kann in solchem Falle vermittelst einer Integraltransformation die Lösung der Differenzengleichung entweder auf die Lösung einer Differentialgleichung oder auf die Lösung einer Differenzengleichung von einfacherem Typus als der vorgelegten reduzieren.

Nehmen wir an, dass die Koeffizienten in der Differenzengleichung (1) auf die Form:

$$P_i(x) = C_{i,0} + C_{i,1}(x+i) + C_{i,2}(x+i)(x+i+1) + \ldots + C_{i,p}(x+i)(x+i+1)\ldots(x+i+p-1)$$

gebracht sind, wo die $C_{i,s}$ von x unabhängige Konstanten sind, und wo vorausgesetzt wird, dass $C_{k,p} \neq 0$ und $C_{0,p} \neq 0$. Setzt man

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt \tag{25}$$

und bestimmt $v(t)$ als Integral der Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{i=p} Q_i(t)(-t)^i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0, \tag{26}$$

wo

$$Q_i(t) = \sum_{s=0}^{s=k} C_{s,i}\, t^s,$$

so befriedigt $u(x)$ die Differenzengleichung, vorausgesetzt dass der Integrationsweg in passender Weise gewählt ist. Die singulären Stellen für die Differenzengleichung (26) sind ausser 0 und ∞ die Wurzeln in der charakteristischen Gleichung $Q_p(t) = 0$. Mögen diese $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sein, und stellen wir uns sie so geordnet vor, dass, wenn man $a_s = \rho\, e^{i\zeta_s}$ setzt, dann

$$0 \leqq \zeta_1 \leqq \zeta_2 \leqq \ldots \leqq \zeta_k < 2\pi$$

ist.

Wenn a_j eine n-doppelte Wurzel in der charakteristischen Gleichung ist, so nehmen wir vorläufig an, dass es zugleich eine $(n-m)$-doppelte Wurzel in $Q_{p-m}(t) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ ist. Die singulären Stellen sind dann alle Stellen der Bestimmtheit. In der Umgebung von $t = a_j$ existieren n kanonische Integrale von der Form

$$v_{s,j} = \frac{\partial^r}{\partial \beta_{s,j}^r}\left[(a_j - t)^{\beta_{s,j}} \varphi_{s,j}(t - a_j)\right] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{27}$$

wo $\varphi(t-a)$ eine in der Umgebung von $t = a$ reguläre Funktion ist. Dies ist derart zu verstehen, dass die determinierende Gleichung für den Punkt a_j p Wurzeln $\beta_{1,j}, \ldots, \beta_{p,j}$ hat, aber nur den n ersten davon entsprechen nicht-reguläre Integrale. Wenn $\beta_{s,j}, \beta_{s+1,j}, \ldots, \beta_{s+m,j}$ eine Wurzelgruppe bildet, so soll man in $v_{s,j}, v_{s+1,j}, \ldots, v_{s+m,j}$ r die Werte $0, 1, \ldots, m$ geben. Die gesamte Anzahl nicht-regulärer Integrale der Form (27) ist also gleich k (der Ordnung der Differenzengleichung). In der Umgebung von $t = 0$ existieren p kanonische Integrale der Form

$$v_{s,0} = \frac{\partial^r}{\partial \alpha_s^r}\left[t^{-\alpha_s} \varphi_s(t)\right], \tag{28}$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_p$ die Nullpunkte für $P_0(x)$ sind. In der Umgebung von $t = \infty$ existieren p kanonische Integrale der Form

$$v_{s,\infty} = \frac{\partial^r}{\partial \gamma_s^r}\left[t^{-\gamma_s}\varphi_s\left(\frac{1}{t}\right)\right], \tag{29}$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ die Nullpunkte für $P_k(x-k)$ sind.

Mit a_j als Zentrum zeichnen wir einen Kreis mit einem so kleinen Radius, dass alle andere singuläre Stellen ausserhalb dieses Kreises liegen. Es möge der Radiusvektor des Punktes a_j (resp. die Verlängerung des Radiusvektors) den Kreis im Punkte b_j (resp. c_j) schneiden, und l_j eine Schleife bezeichnen, die von der Geraden von Null bis b_j, dem Kreis in positiver Umlaufsrichtung durchlaufen, und der Geraden von b_j bis Null zusammengesetzt ist; es möge ferner L_j eine Schleife bezeichnen, die von der Geraden von ∞ bis c_j in der Verlängerung des Radiusvektors, dem Kreis in negativer Umlaufsrichtung durchlaufen, und der Geraden von c_j bis ∞ zusammengesetzt ist.

Wir setzen:

$$u_j(x) = \int_{l_j} t^{x-1} v_{s,j}\,dt \tag{30}$$

$$U_j(x) = \int_{L_j} t^{x-1} v_{s,j}\,dt \tag{31}$$

und bezeichnen wie oben $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ als 1. kanonisches Fundamentalsystem und $U_1(x), \ldots, U_k(x)$ als 2. kanonisches Fundamentalsystem. Die Integrale im 1. kanonischen Fundamentalsystem sind durch die Gleichung (30) definiert für $\Re(x)$ grösser als diejenige der Zahlen a_s, deren reeller Teil am grössten ist. Sie sind meromorphe Funktionen von x mit Polen in den Punkten

$$a_s - n \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, p \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Es kommt dann besonders darauf an, diese in der Umgebung des Punktes ∞ zu untersuchen. Setzt man in (30) die Reihen (27) ein und integriert gliedweise, findet man eine Entwickelung der Form:

$$u_j(x) \sim a_j^x \,\Phi_s(x), \tag{32}$$

wo $\Phi_s(x)$ ein Ausdruck der Form (12) ist, nur sind die Fakultätenreihen im allgemeinen divergent, es sei denn, dass $t = 0$ die dem a_j am nächsten liegende singuläre Stelle ist. Diese Entwickelung stellt $u_j(x)$ asymptotisch innerhalb des Winkelraumes dar:

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Die Integrale im 2. kanonischen Fundamentalsystem sind durch (31) definiert für $\Re(x)$ kleiner als diejenige der Wurzeln γ_s, deren reeller Teil am kleinsten ist. Sie sind meromorphe Funktionen mit Polen in den Punkten

$$\gamma_s + n \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, p \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Bei gliedweiser Integration findet man eine Entwickelung der Form:

$$U_j(x) \sim a_j^x \Psi_s(x), \tag{33}$$

wo $\Psi_s(x)$ die durch (17) angegebene Bedeutung hat, doch sind die Fakultätenreihen im allgemeinen divergent; diese Entwickelung stellt $U_j(x)$ asymptotisch innerhalb des Winkelraumes dar:

$$\frac{3\pi}{2} - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Die Winkelräume, innerhalb welcher die asymptotischen Werte der Integrale sich so unmittelbar bestimmen lassen, ergänzen einander. Um die Integrale in der ganzen Umgebung von $x = \infty$ zu untersuchen, liegt es deshalb nahe, Relationen zwischen den beiden kanonischen Fundamentalsystemen zu suchen. Diese Relationen haben eine sehr einfache Form. Um sie zu bestimmen, kann man in $u_j(x)$ den Integrationsweg l_j ändern, doch ohne irgend einen singulären Punkt zu überschreiten, bis er zuletzt aus einer Reihe von Schleifen $L_1, \ldots, L_k$ besteht und einem Kreis mit Null als Zentrum, dessen Radius wir über jede Grenze hinaus wachsen lassen. Es möge a_j eine n-doppelte Wurzel in der charakteristischen Gleichung sein und

$$a_{j-r+1} = a_{j-r+2} = \ldots = a_{j-r+n}.$$

Man findet dann folgende Gleichung:

$$u_j(x) = U_j(x) + \sum_{\nu=j-r+1}^{\nu=k} \pi_{j,\nu}(x)\, U_\nu(x) + e^{2\pi i x} \sum_{\nu=1}^{\nu=j-r} \pi_{j,\nu}(x)\, U_\nu(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{34}$$

wo

$$\pi_{j,\nu}(x) = \sum_{s=1}^{s=p} \left(\frac{A_{j,s}^{(\nu)}}{e^{2\pi i(x-a_s)} - 1} + \frac{B_{j,s}^{(\nu)}}{(e^{2\pi i(x-a_s)} - 1)^2} + \cdots + \frac{M_{j,s}^{(\nu)}}{(e^{2\pi i(x-a_s)} - 1)^{m_s}} \right). \tag{35}$$

m_s bezeichnet hier die Multiplizität der Wurzel a_s, und die von x unabhängigen Konstanten $A, B, \ldots, M$ können bestimmt werden, wenn wir die Gruppe für die Differentialgleichung (26) als bekannt voraussetzen. Diese Relationen bilden einen Kernpunkt in der Theorie. Mit den asymptotischen Gleichheiten (32) und (33) verglichen zeigen sie, wie sich jedes der kanonischen Integrale verhält, wenn x gegen ∞ längs einer willkürlichen Linie wächst. Die Umgegend des Punktes ∞ wird in eine Reihe Winkelräume geteilt, von welchen der eine eine Öffnung hat, die $\geqq \frac{\pi}{2}$ ist; innerhalb jedes dieser Winkelräume wird $u_j(x)$ asymptotisch durch eine Entwicklung der Formen (32) oder (33) dargestellt, aber dasselbe Integral wird innerhalb verschiedener Winkelräume durch verschiedene asymptotische Entwicklungen dargestellt.

Die Bestimmung der Konstanten $A, B, \ldots, M$ durch Deformation des Integrationsweges in dem Laplace'schen Integral (30) ist eine ziemlich umständliche Operation. Man kann aber — jedenfalls für eine speziellere Klasse von Gleichungen — in einer direkteren Weise zu den Gleichungen (34) gelangen.

Betrachten wir eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{i=k} Q_i(x)\,\Delta_{-1}^{i}\,u(x) = 0\,, \tag{36}$$

wo die Koeffizienten $Q_i(x)$ Polynomien sind, deren Grad mit der Merkzahl abnimmt, d. h. dass, wenn $Q_k(x)$ p-ten Grades ist $(p \geqq k)$, so ist $Q_{k-r}(x)$ höchstens $(p-r)$-ten Grades. Die singulären Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ fallen hier alle im Punkt 1 zusammen, der notwendigerweise eine singuläre Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (26) ist. Die in den Entwickelungen für die kanonischen Integrale vorkommenden Fakultätenreihen werden deshalb alle konvergent; hieraus folgt aber, dass die asymptotischen Gleichheiten (32) und (33) auch für $\varepsilon = 0$ gelten. Diese Eigenschaft kann zur Bestimmung der Zusammenhangsformeln benutzt werden. Da $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ ein Fundamentalsystem bilden, so müssen k Relationen der Form:

$$U_j(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} \pi_{j,\nu}(x)\,u_\nu(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{37}$$

existieren, wo

$$\pi_{j,\nu}(x) = \pi_{j,\nu}(x+1).$$

Schreibt man in diesen Gleichungen für x sukzessive $x+1, x+2, \ldots, x+k-1$, so erhält man ein System von k^2 Gleichungen, das zur Bestimmung der periodischen Funktionen dienen kann.

Es möge $D_{j,\nu}(x)$ die Determinante bezeichnen, die aus der Determinante (2) abgeleitet wird, wenn wir in der ν-ten Spalte u_ν durch U_j ersetzen.

Man hat dann

$$\pi_{j,\nu} = \frac{D_{j,\nu}(x)}{D(x)}\,. \tag{38}$$

Man kann nun zeigen, dass die Determinante $D(x)$ gleich

$$D(x) = K \cdot \frac{\Gamma(x-\alpha_1)\,\Gamma(x-\alpha_2)\ldots\Gamma(x-\alpha_p)}{\Gamma(x-\gamma_1+k)\ldots\Gamma(x-\gamma_p+k)} \tag{39}$$

ist, wo K eine von x unabhängige von Null verschiedene Konstante bezeichnet. Hieraus folgt aber, dass $\pi_{j,\nu}(x)$ eine meromorphe Funktion von x, mit Polen in den Punkten

$$\ldots, \gamma_s-2, \gamma_s-1, \gamma_s, \gamma_s+1, \gamma_s+2, \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

ist. Der Zähler hat ja nämlich Pole in den Punkten $\gamma_s - k + n + 1$ und $\alpha_s - n$, und der Nenner hat infolge (39) Pole derselben Ordnung wie der Zähler in den Punkten $\alpha_s - n$ und Nullpunkte in den Punkten $\gamma_s - k - n$; n bezeichnet hier eine ganze, nicht negative Zahl.

Lässt man x gegen ∞ wachsen, indem es beständig innerhalb eines Periodenstreifens bleibt, so folgt aus dem Determinantenausdruck (38) in Verbindung mit den für solche Werte von x bekannten asymptotischen Ausdrücken für die kanonischen Integrale, dass

$$\lim_{x=\infty} \pi_{j,j}(x) = \text{Konst.}$$

$$\lim_{x=\infty} \pi_{j,\nu}(x) = 0 \quad \nu \gtrless j.$$

Ein bekannter Satz aus der Theorie der periodischen Funktionen sagt nun aber, dass:

Eine jede eindeutige, überall meromorphe, periodische Funktion von x mit dem Periodizitätsmodul $+1$, die, wenn x gegen ∞ innerhalb eines Periodenstreifens wächst, entweder gegen 0, ∞ oder eine Konstante konvergiert, notwendigerweise eine rationale Funktion von $e^{2\pi i x}$ sein muss.

Hieraus und aus dem oben gesagten folgt dann, dass

$$\pi_{j,\nu}(x) = \varepsilon_{j,\nu} + \sum_{s=1}^{s=p} \left(\frac{A_{j,s}^{(\nu)}}{e^{2\pi i(x-\gamma_s)} - 1} + \frac{B_{j,s}^{(\nu)}}{(e^{2\pi i(x-\gamma_s)} - 1)^2} + \cdots + \frac{M_{j,s}^{(\nu)}}{(e^{2\pi i(x-\gamma_s)} - 1)^{m_s}} \right), \tag{40}$$

wo m_s die Multiplizität des Poles γ_s bezeichnet und

$$\varepsilon_{j,\nu} = \begin{cases} 1 & \nu = j \\ 0 & \nu \lessgtr j \end{cases}.$$

Es erübrigt noch, die Konstanten $A, B, \ldots, M$ zu bestimmen. Diese stehen in einer einfachen Beziehung zu den Multiplikatoren der Differenzengleichung.

Denken wir uns diese in der Form geschrieben:

$$P(u(x)) = u(x) + P_1(x)\,u(x-1) + \ldots + P_k(x)\,u(x-k) = 0.$$

Pincherle[1] hat gezeigt, dass man zu dieser Gleichung k linear unabhängige Multiplikatoren $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_k(x)$ finden kann, d. h. Funktionen, die so beschaffen sind, dass

$$\mu_i(x) \cdot P(u(x)) = \Delta_{-1} \Gamma(u(x)),$$

wo $\Gamma(u(x))$ ein linearer homogener Differenzenausdruck der $(k-1)$-ten Ordnung ist.

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass alle Pole für $U_j(x)$ einfach sind, und bezeichnen wir mit $2\pi i R_{j,s}$ das Residuum für $U_j(x)$ in γ_s; man hat dann

$$0 = B_{j,s}^{(\nu)} = \ldots = M_{j,s}^{(\nu)}$$

und zeigt leicht, dass

$$A_{j,s}^{(\nu)} = R_{j,s} \cdot \mu_\nu(\gamma_s).$$

Die in den Zusammenhangsformeln zwischen den beiden kanonischen Fundamentalsystemen vorkommenden Konstanten sind also die Pole $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, die Residuen in diesen und die Werte der Multiplikatoren der Differenzengleichung in den Punkten γ_s.

§ 6. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die singulären Stellen für die Differentialgleichung (26) alle Stellen der Bestimmtheit sind. Wenn aber a_j eine singuläre Stelle der Unbestimmtheit ist, so existieren für die a_j entsprechenden

[1] S. Pincherle e U. Amaldi: Le Operazioni distributive e le loro applicazioni all' Analisi. Bologna 1901. S. 242—246. Siehe auch Wallenberg: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft; 26. Februar 1908.

Integrale keine asymptotischen Enwickelungen der oben untersuchten Art. Man kann doch von dem Wachsen dieser Integrale eine ungefähre Vorstellung erhalten. Setzen wir $x = \sigma + i\tau$; man kann dann eine positive Zahl N so bestimmen, dass für $\sigma > N$ die Ungleichheit

$$e^{-\eta\sigma} < \left| u_j(x)\, a_j^{-x} \right| < e^{\eta\sigma}$$

erfüllt ist, wie klein wir auch die positive Zahl η wählen.

Es seien die singulären Punkte Stellen der Bestimmtheit oder nicht, so kann man ein Fundamentalsystem von Integralen bestimmen, die meromorphe Funktionen von $x = re^{iv}$ sind, und jedem dieser Integrale entspricht eine Funktion $\lambda(v)$ derart beschaffen, dass die Ungleichheiten

$$e^{(\lambda(v)-\varepsilon)r} < \left| u_j(x) \right| < e^{(\lambda(v)+\varepsilon)r}$$

für genügend grosse Werte von r erfüllt sind, wie klein wir auch die positive Zahl ε wählen.

$\lambda(v)$ ist eine reelle, kontinuierliche, periodische Funktion von v mit der Periode 2π; sie kann von einer Reihe von Sinusbögen zusammengesetzt werden und ist positiv in einem Intervall von der Länge l wo $2\pi > l \geqq \pi$.

§ 7. Die Laplace'sche Transformation (25) ist nicht die einzige Integraltransformation, die mit Vorteil zur Lösung von linearen Differenzengleichungen angewendet werden kann. Betrachten wir die Differenzengleichung:

$$\left.\begin{aligned} &Q(x)\underset{-1}{\Delta^k} u(x) + \binom{\xi+k}{1} \underset{+1}{\Delta} Q(x) \underset{-1}{\Delta^{k-1}} u(x) + \binom{\xi+k}{2} \underset{+1}{\Delta^2} Q(x) \underset{-1}{\Delta^{k-2}} u(x) + \ldots + \binom{\xi+k}{k} \underset{+1}{\Delta^k} Q(x)\, u(x) \\ &- R(x)\underset{-1}{\Delta^{k-1}} u(x) - \binom{\xi+k-1}{1} \underset{+1}{\Delta} R(x) \underset{-1}{\Delta^{k-2}} u(x) - \ldots - \binom{\xi+k-1}{k-1} \underset{+1}{\Delta^{k-1}} R(x)\, u(x) = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{41}$$

wo ξ ein von x unabhängiger Parameter ist, während $Q(x)$ ein Polynomium vom k-ten Grade ist und $R(x)$ ein Polynomium, dessen Grad $< k$ ist, und wo wir

$$\binom{\xi}{i} = \frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-i)}{1\cdot 2\ldots i}$$

gesetzt haben. Diese Gleichung ist mit einer von POCHHAMMER[1] untersuchten Differentialgleichung analog, die nachher von JORDAN[2] eine sehr elegante Behandlung erhalten hat.

Setzen wir

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+1)}\, v(t)\, dt, \tag{42}$$

und versuchen wir $v(t)$ und den Integrationsweg so zu bestimmen, dass $u(x)$ die Differenzengleichung (41) befriedigt. Man sieht leicht, dass

[1] Crelle's Journal Bd. 71 S. 317, 1870.

[2] Cours d'Analyse Bd. III S. 240, Paris 1896.

$$\mathop{\Delta^i}_{-1} u(x) = \frac{(\xi+1)(\xi+2)\dots(\xi+i)}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+i+1)} v(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \dots, k);$$

setzt man diese Ausdrücke in (41) ein, so findet man:

$$(\xi+k)\int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+k+1)} v(t)\left\{Q(x) + \frac{t-x+k}{1!}\mathop{\Delta}_{+1} Q(x) + \dots + \frac{(t-x+k)\dots(t-x+1)}{k!}\mathop{\Delta^k}_{+1} Q(x)\right\} dt =$$

$$= \int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+k)} v(t)\left\{R(x) + \frac{t-x+k-1}{1}\mathop{\Delta}_{+1} R(x) + \dots + \frac{(t-x+k-1)\dots(t-x+1)}{(k-1)!}\mathop{\Delta^{k-1}}_{+1} R(x)\right\} dt.$$

Da aber nun

$$Q(t) = Q(x) + \frac{t-x}{1}\mathop{\Delta}_{+1} Q(x) + \frac{(t-x)(t-x-1)}{1\cdot 2}\mathop{\Delta^2}_{+1} Q(x)\dots,$$

so wird diese Gleichung auf

$$\int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+k+1)} v(t)\left\{(\xi+k)\,Q(t+k) - (t-x+k)\,R(t+k+1)\right\} dt = 0 \tag{43}$$

reduziert.

Wir bestimmen nun $v(t)$ so, dass die Differenzengleichung

$$Q(t+k)v(t) - Q(t+k-1)v(t-1) = R(t+k-1)v(t) \tag{44}$$

befriedigt wird. (43) wird dabei auf

$$\int \frac{\Gamma(t-x-\xi+1)}{\Gamma(t-x+k+1)} Q(t+k)v(t)\,dt = \int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+k)} Q(t+k-1)v(t-1)\,dt \tag{45}$$

reduziert.

Der Integrationsweg muss also derart gewählt werden, dass er in diesem Integral den Axen der imaginären Zahlen parallel um eine Längeneinheit verschoben werden kann, ohne dass der Wert des Integrals dabei verändert wird.

Es mögen die Zahlen α_s die Nullpunkte für $Q(t+k)$ bezeichnen und die Zahlen γ_s die Nullpunkte für $Q(t+k+\xi) - R(t+k+\xi-1)$. Diese Zahlen haben dann dieselbe Bedeutung wie in § 5, und die Differenzengleichung (44) kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$v(t+1) = \frac{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\dots(t-\alpha_k)}{(t-\gamma_1-\xi+1)\dots(t-\gamma_k-\xi+1)} v(t). \tag{46}$$

Setzen wir:

$$\frac{1}{\Phi(t)} = \Gamma(1+\alpha_1-t)\,\Gamma(1+\alpha_2-t)\dots\Gamma(1+\alpha_k-t)\,\Gamma(1-\gamma_1-\xi+t)\dots\Gamma(1-\gamma_k-\xi+t).$$

Die ganze transcendente Funktion $\Phi(t)$ ist dann ein partikuläres Integral der Differenzengleichung (46).

Wir teilen wie oben die γ in Gruppen. Mag $\gamma_s, \dots, \gamma_{s+p}$ eine solche sein, und denken wir uns sie so geordnet, dass

$$\Re(\gamma_s) \geqq \Re(\gamma_{s+1}) \geqq \dots \geqq \Re(\gamma_{s+p}).$$

Einer solchen Gruppe entsprechend bestimmen wir eine Reihe Funktionen $v_s(t)$ durch folgende Gleichungen:

$$v_{s+i}(t) = \Phi(t) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi(\xi + \gamma_s - t)} \cdots \frac{\pi}{\sin \pi(\xi + \gamma_{s+i} - t)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots p). \qquad (47)$$

$I(x)$ möge den imaginären Teil von x bezeichnen, und bestimmen wir zwei Zahlen a_s und b_s so, dass

$$I(b_s) > I(\gamma_s + \xi) > I(a_s).$$

Man kann dann ein Fundamentalsystem von Integralen der Differenzengleichungen (41) durch die Gleichungen

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_s - \infty}^{a_s + \infty} \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+1)} v_s(t)\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{b_s - \infty}^{b_s + \infty} \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+1)} v_s(t)\,dt \qquad (s = 1, 2, \ldots, k) \qquad (48)$$

bestimmen.

Diese Integrale sind konvergent, wenn

$$\Re(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k + (k-1)\xi) < k$$

und vorausgesetzt, dass $x + \xi$ nicht auf dem Integrationsweg liegt.

Es möge γ_{s+i} die $(i+1)$-te Wurzel innerhalb einer Wurzelgruppe sein (jede Wurzel eine Anzahl Male mitgerechnet, die der Multiplizität der Wurzel gleich ist). Man kann dann zeigen, dass das dem γ_{s+i} entsprechende Integral $u_{s+i}(x)$ eine meromorphe Funktion von x ist, die Pole von der $(i+1)$-ten Ordnung in den Punkten γ_{s+i}, $\gamma_{s+i}+1$, $\gamma_{s+i}+2, \ldots$ hat. Jedes dieser Integrale besitzt also, im Gegensatz zu den oben untersuchten kanonischen Integralen, nur eine einzelne Reihe Pole[1]).

[1] In der Litteratur der letzten Jahre giebt es mehrere Arbeiten, lineare Differenzengleichungen betreffend, die mit Vorstehendem Berührungspunkte haben. Wir müssen uns hier darauf beschränken, diese Arbeiten nur zu erwähnen:

H. Poincaré, American Journal of Mathematics, Bd. VII, S. 203—264, 1885.

É. Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, S. 419—424. Paris 1908.

O. Perron, Crelle's Journal, Bd. 136, S. 17—37, 1909; Bd. 137, S. 6—64, 1909. Mathematische Annalen, Bd. 66, S. 446—487, 1909. Acta mathematica, Bd. 34, S. 109—137, 1911.

J. Horn, Mathematische Annalen, Bd. 53, S. 117—192, 1900. Crelle's Journal, Bd. 138, S. 159—191, 1910.

Galbrun, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 5 avril 1909; 6 décembre 1909; 24 janvier 1910.

Ford, Annali di Matematica, Serie 3, Bd. 13, S. 313—328, 1907. Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 10, S. 319—336, 1909.

G. Wallenberg und A. Guldberg, Theorie der linearen Differenzengleichungen. Leipzig und Berlin 1911.